

La théorie de Gross Pitaevskii pour un condensat de Bose-Einstein en rotation : vortex et transitions de phase

Nicolas Rougerie

Directeurs de thèse : Xavier Blanc et Sylvia Serfaty

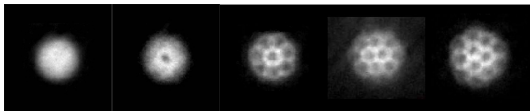
Laboratoire Jacques-Louis Lions, 09 Décembre 2010

La condensation de Bose-Einstein

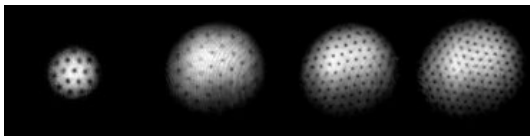
- ▶ un condensat de Bose-Einstein (BEC) exhibe des **propriétés quantiques à une échelle macroscopique** ($\sim 100\mu m$ typiquement)
- ▶ de 'nombreux' (**bosons**) d'un **gaz ultra-froid** occupent le même état quantique
- ▶ On peut décrire un BEC avec une seule **fonction d'onde macroscopique** ψ à valeurs complexes,
- ▶ $|\psi|^2$ donne la **densité de matière**.
- ▶ Prédiction du phénomène par Einstein, basée sur des idées de Bose (1924, 1925)
- ▶ Première observation expérimentale en 1995 (prix Nobel de physique 2001 attribué à Cornell, Wieman et Ketterle)

Superfluidité et tourbillons quantiques

Un BEC réagit à la rotation par la nucléation de **tourbillons** (vortex).
L'observation de tourbillons dans un fluide à l'équilibre est une manifestation de **l'absence de viscosité**, et donc de la **superfluidité**.



Vortex dans un condensat en rotation, expériences au LKB, ENS Ulm
[K.W. Madison *et al*, Phys. Rev. Lett. 84 806 (2000)]



Réseaux de vortex, expériences au MIT
[J.R. Abo-Shaeer *et al*, Science 292 476 (2001)]

Théorie de Gross-Pitaevskii bi-dimensionnelle

On note $x = (x_1, x_2)$ et $x^\perp = (-x_2, x_1)$

$$\mathcal{E}^{\text{GP}}[\psi] = \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla \psi|^2 - 2\Omega x^\perp \cdot (i\psi, \nabla \psi) + V(x)|\psi|^2 + G|\psi|^4 \right) dx$$

à minimiser sous la **contrainte de masse**

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\psi|^2 dx = 1.$$

- ▶ G : **mesure les interactions entre particules**
- ▶ $V(x)$: **potentiel de piégeage**, en général un piège magnétique
- ▶ Ω : **vitesse angulaire** à laquelle le piège est mis en rotation
- ▶ $(i\psi, \nabla \psi) = -\text{Im}(\psi \nabla \psi^*)$: **courant superfluide** ($= \rho^2 \nabla \phi$ si $\psi = \rho e^{i\phi}$)

Description des tourbillons

Un **vortex** est décrit par un point où il y a

- ▶ annulation de la densité de matière $|\psi|^2 = 0$
- ▶ une **circulation de phase** (degré topologique) quantifiée

$$\int_{\mathcal{C}} \partial_{\tau} \phi = 2\pi d, \quad d \in \mathbb{Z}^*$$

si $\psi = \rho e^{i\phi}$ sur \mathcal{C} , une courbe fermée autour du vortex avec vecteur tangent τ .

Prototype de vortex de degré d à l'origine:

$$\psi(r, \theta) = f(r) e^{id\theta} = f(r) \left(\frac{z}{|z|} \right)^d$$

avec

- ▶ f radiale, réelle et ≥ 0
- ▶ $f(0) = 0$

Quelques livres de référence

- ▶ F. Béthuel, H. Brézis, F. Hélein, *Ginzburg-Landau vortices*, Birkhäuser 1994
- ▶ E.H. Lieb, R. Seiringer, J.P. Solovej, J. Yngvason, *The Mathematics of the Bose Gas and its Condensation*, Birkhäuser 2005
- ▶ A. Aftalion, *Vortices in Bose-Einstein Condensates*, Birkhäuser 2006
- ▶ E. Sandier, S. Serfaty, *Vortices in the Magnetic Ginzburg-Landau Model*, Birkhäuser 2007
- ▶ S. Fournais, B. Helffer, *Spectral Methods in Surface Superconductivity*, Birkhäuser 2010

Importance du potentiel de piégeage

$$\mathcal{E}^{\text{GP}}[\psi] = \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla\psi - i\Omega x^\perp \psi|^2 + (V(x) - \Omega^2|x|^2) |\psi|^2 + G|\psi|^4) dx,$$

- ▶ pour la plupart des expériences V est un **potentiel harmonique**
 $V(x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$
 $\Omega^2 > \min(a_1, a_2) \Rightarrow \mathcal{E}^{\text{GP}}$ n'est pas bornée inférieurement, **perte de confinement**.
- ▶ Fetter (PRA 2001): utiliser un **potentiel croissant plus rapidement que $|x|^2$** à l'infini. Alors Ω **peut être arbitrairement grand**.
- ▶ Expériences à l'ENS (Bretin-Stock-Seurin-Dalibard PRL 2004) avec un potentiel $V(x) \approx |x|^2 + k|x|^4$

Autres types de potentiels permettant de prendre $\Omega \rightarrow +\infty$:

- ▶ **pièges homogènes** $V(x) = |x|^s$, $s > 2$
- ▶ **piège plat** $V_R(x) = +\infty$ pour $|x| > R$, $V(x) = 0$ pour $|x| \leq R$, problème posé sur B_R .

Vitesses critiques en théorie de Gross-Pitaevskii avec piégeage anharmonique

“Conjectures” : le condensat

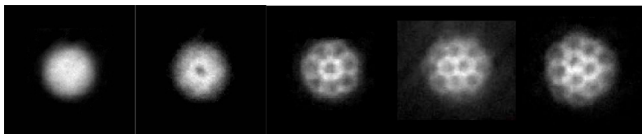
- ▶ ne contient **pas de vortex** si $\Omega \leq \Omega_{c1}$
- ▶ contient un **réseau de vortex** si $\Omega_{c1} < \Omega \leq \Omega_{c2}$
- ▶ contient un **réseau de vortex et un trou central** si $\Omega_{c2} \leq \Omega \leq \Omega_{c3}$
- ▶ contient uniquement un **vortex géant central** si $\Omega_{c3} < \Omega$.

[Fischer-Baym PRL 2003, Kavoulakis-Baym NJP 2003, Fetter-Jackson-Stringari PRA 2005 ...]

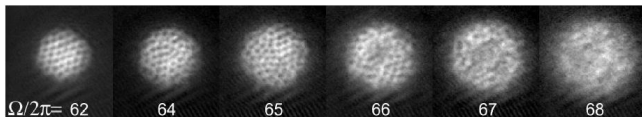
Comparaison avec le piégeage harmonique :

- ▶ Si Ω “proche de” Ω_{c2} , régime de Landau (Aftalion-Blanc, Aftalion-Blanc-Nier ...), réseau de vortex déformé
- ▶ Si Ω “trop proche de” Ω_{c2} , perte de validité de la description Gross-Pitaevskii (Lieb-Seiringer-Yngvason, Lewin-Seiringer), “effet Hall quantique”

Les trois transitions de phase en images : expériences

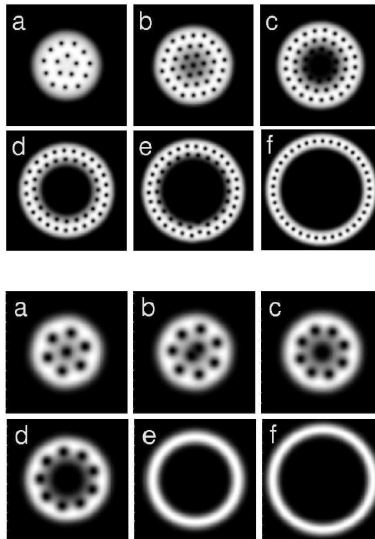


Expériences au LKB, ENS Paris, piège harmonique.
[K.W. Madison *et al*, Phys. Rev. Lett. 84, 806 (2000)]



Expériences au LKB, ENS Paris, piège anharmonique.
[V. Bretin *et al*, Phys. Rev. Lett. 92, 275 (2004)]

Les trois transitions de phase en image : simulations numériques



[A.L. Fetter, B. Jackson, S. Stringari, Phys. Rev. A 71 (2005)]

Présentation des résultats

1. Résultats pour le piège “quadratique plus quartique”
 - 1.1 Régime “plus bas niveau de Landau” : réseau de vortex dans un condensat annulaire (avec Xavier Blanc)
 - 1.2 Régime de rotation extrême et vortex géant
2. Résultats pour le “piège plat” : la troisième vitesse critique
 - 2.1 Borne supérieure et vortex géant (avec Michele Correggi et Jakob Yngvason)
 - 2.2 Borne inférieure et cercle de vortex
 - 2.3 Quelques idées des preuves

Présentation des résultats

1. Résultats pour le piège “quadratique plus quartique”
 - 1.1 Régime “**plus bas niveau de Landau**” : **réseau de vortex dans un condensat annulaire** (avec Xavier Blanc)
 - 1.2 Régime de rotation extrême et vortex géant
2. Résultats pour le “piège plat” : la troisième vitesse critique
 - 2.1 Borne supérieure et vortex géant (avec Michele Correggi et Jakob Yngvason)
 - 2.2 Borne inférieure et cercle de vortex
 - 2.3 Quelques idées des preuves

Le plus bas niveau de Landau “LLL”

- Premier espace propre de l'opérateur de Ginzburg-Landau $-(\nabla - i\Omega x^\perp)^2$ sur \mathbb{R}^2
- Associé à la valeur propre Ω :

$$\inf_{\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}=1} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \psi - i\Omega x^\perp|^2 = \Omega$$

- Existence d'un **trou spectral** égal à Ω .
- Constitué des fonctions de la forme

$$\psi(x_1, x_2) = f(z)e^{-\Omega|z|^2/2}$$

avec $z = x_1 + ix_2$ et **f** holomorphe.

Idee : Restreindre la minimisation de l'énergie au LLL

Utilisé pour des condensats dans des pièges harmoniques dans la limite $\Omega \rightarrow 1$: Ho, Cooper, Komineas, Read, Dalibard, **Aftalion, Blanc, Nier** ...

$$\mathcal{E}^{\text{GP}}[\psi] = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2} |\nabla \psi - i\Omega x^\perp \psi|^2 + \frac{1 - \Omega^2}{2} |x|^2 |\psi|^2 + \frac{G}{2} |\psi|^4 \right) dx.$$

Le problème variationnel

Partant de

$$\mathcal{E}^{\text{GP}}[\psi] = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} |\nabla \psi - i\Omega x^\perp \psi|^2 + \left(\frac{(1 - \Omega^2)}{2} |x|^2 + \frac{k}{4} |x|^4 \right) |\psi|^2 + \frac{G}{2} |\psi|^4$$

et prenant

$$\varepsilon = k^{1/3} \rightarrow 0, \quad \Omega = 1 + \beta k^{2/3} = 1 + \beta \varepsilon^2$$

on se ramène à l'étude du problème variationnel

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\text{LLL}}[f] &= \int_{\mathbb{C}} \left(\left(-\beta |z|^2 + \frac{1}{4} |z|^4 \right) |f|^2 e^{-|z|^2/\varepsilon} + \frac{G}{2} |f|^4 e^{-2|z|^2/\varepsilon} \right) dz. \\ F^{\text{LLL}} &= \inf \{ \mathcal{F}^{\text{LLL}}[f], f \in \mathfrak{F}_\varepsilon, \|f\|_{\mathfrak{F}_\varepsilon} = 1 \}. \end{aligned}$$

dans l'espace de Fock-Bargmann

$$\mathfrak{F}_\varepsilon := \left\{ f \text{ holomorphe}, \int_{\mathbb{C}} |f|^2 e^{-|z|^2/\varepsilon} dz < \infty \right\}$$

Résultats théoriques (1) : Aspect bien posé et propriétés des minimiseurs

Théorème (X. Blanc, NR, 2008)

- ▶ *Il existe au moins une solution au problème de minimisation.*
- ▶ *Tout minimiseur satisfait l'équation d'Euler-Lagrange*

$$\left(-\beta + \frac{1}{4}\varepsilon\right)\Pi_\varepsilon(|z|^2 f) + \frac{1}{4}\Pi_\varepsilon(|z|^2 \Pi_\varepsilon(|z|^2 f)) + G\Pi_\varepsilon(-|z|^{2/\varepsilon}|f|^2 f) = \mu f$$

où μ est un multiplicateur de Lagrange et Π_ε le *projecteur orthogonal* sur \mathfrak{F}_ε .

- ▶ *Si ε est suffisamment petit, toute solution du problème de minimisation a un nombre infini de zéros.*

Résultats théoriques (2) : Construction de points quasi-critiques

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_b^{\text{TF}}[\rho] &= \int_{\mathbb{C}} \left(\left(-\beta|z|^2 + \frac{1}{4}|z|^4 \right) |\rho| + \frac{bG}{2} |\rho|^2 \right) dz \\ E_b^{\text{TF}} &= \inf \left\{ \mathcal{E}_b^{\text{TF}}[\rho], \rho \geq 0, \int_{\mathbb{R}^2} |z|^2 \rho < +\infty, \int_{\mathbb{R}^2} \rho = 1 \right\}.\end{aligned}$$

Théorème (X. Blanc, NR 2008)

On peut construire une fonction test f telle que

$$(-\beta + \frac{1}{4}\varepsilon)\Pi_\varepsilon(|z|^2 f) + \frac{1}{4}\Pi_\varepsilon(|z|^2 \Pi_\varepsilon(|z|^2 f)) + G\Pi_\varepsilon(e^{-|z|^2/\varepsilon}|f|^2 f) = \mu_b^{\text{TF}} f + R_\varepsilon$$

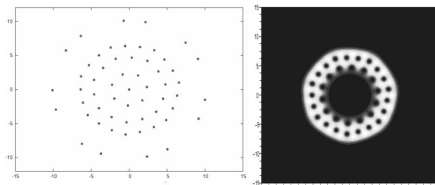
avec $\mu_b^{\text{TF}} \in \mathbb{R}$ et $\|R_\varepsilon\|_{\mathfrak{F}_\varepsilon} \leq C\varepsilon^{1/4}$. De plus

$$F^{\text{LLL}} \leq \mathcal{F}^{\text{LLL}}[f] = E_b^{\text{TF}} + O(\varepsilon^{1/4}).$$

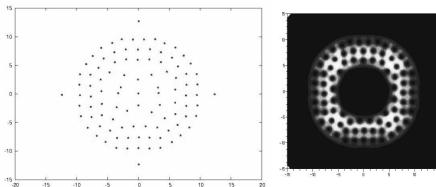
- Idée : déformer un réseau de vortex hexagonal régulier.
- Question naturelle (et difficile) : borne inférieure correspondante

Résultats numériques

Minimisation de $\mathcal{F}^{\text{LLL}}[P]$ pour un polynôme P en fonction de la position des zéros (ie vortex).



Simulations numériques, $G = 3, k = 10^{-4}, \beta = 1$ ($\Omega - 1 = 2.2 \cdot 10^{-3}$)



Simulations numériques, $G = 3, k = 10^{-5}, \beta = 1$ ($\Omega - 1 = 4.6 \cdot 10^{-4}$)

Présentation des résultats

1. Résultats pour le piège “quadratique plus quartique”
 - 1.1 Régime “plus bas niveau de Landau” : réseau de vortex dans un condensat annulaire (avec Xavier Blanc)
 - 1.2 **Régime de rotation extrême et vortex géant**
2. Résultats pour le “piège plat” : la troisième vitesse critique
 - 2.1 Borne supérieure et vortex géant (avec Michele Correggi et Jakob Yngvason)
 - 2.2 Borne inférieure et cercle de vortex
 - 2.3 Quelques idées des preuves

Vortex géant dans le régime de rotation extrême

$$\mathcal{E}^{\text{GP}}[\psi] = \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla \psi - i\Omega x^\perp \psi|^2 + ((1 - \Omega^2)|x|^2 + k|x|^4) |\psi|^2 + G|\psi|^4 \right) dx.$$

Etat fondamental Ψ^{GP} et énergie fondamentale E^{GP} .

Régime de rotation extrême :

$$L = \Omega^3 k^{-1} \rightarrow +\infty, G \text{ fixé}.$$

Théorème (NR 2009)

Il existe un anneau $\mathcal{A} = \{1 - CL^{-1/2} \leq r \leq 1 + CL^{-1/2}\}$ tel que

- ▶ $\int_{\mathcal{A}} |\Psi^{\text{GP}}|^2 = 1 - o(1)$. *La masse est concentrée dans \mathcal{A}*
- ▶ Ψ^{GP} ne s'annule pas dans \mathcal{A} . *Pas de vortex dans \mathcal{A}*

+ Résultats partiels dans le cas $L \gg G^2$.

Présentation des résultats

1. Résultats pour le piège “quadratique plus quartique”
 - 1.1 Régime “plus bas niveau de Landau” : réseau de vortex dans un condensat annulaire (avec Xavier Blanc)
 - 1.2 Régime de rotation extrême et vortex géant
2. **Résultats pour le “piège plat” : la troisième vitesse critique**
 - 2.1 Borne supérieure et vortex géant (avec Michele Correggi et Jakob Yngvason)
 - 2.2 Borne inférieure et cercle de vortex
 - 2.3 Quelques idées des preuves

Le cadre : régime de forte interaction

On considère le **piège plat**

$$V(x) = +\infty \text{ pour } |x| > 1, \quad V(x) = 0 \text{ pour } |x| \leq 1.$$

- ▶ En toute rigueur, modèle pour un superfluide dans une enceinte solide.
- ▶ Formellement, limite $s \rightarrow +\infty$ d'un piège homogène.

$$V(x) = |x|^s.$$

L'énergie devient (avec $G = \frac{1}{\varepsilon^2}$)

$$\mathcal{E}^{\text{GP}}[\psi] = \int_{B_1} \left(|\nabla \psi - i\Omega x^\perp \psi|^2 - \Omega^2 |x|^2 |\psi|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |\psi|^4 \right) dx,$$

avec **état fondamental** Ψ^{GP} et **énergie fondamentale** E^{GP} ie

$$E^{\text{GP}} = \inf_{\|\psi\|_{L^2(B_1)}=1} \mathcal{E}^{\text{GP}}[\psi] = \mathcal{E}^{\text{GP}}[\Psi^{\text{GP}}].$$

On considère le régime de forte interaction $\varepsilon \rightarrow 0$.

Résultats antérieurs : la première vitesse critique

Régime $\Omega \lesssim |\log \varepsilon|$:

- ▶ les forces centrifuges sont négligeables, on peut adapter l'analyse pour des pièges harmoniques
- ▶ Aftalion, Du PRA 2001, Ignat, Millot JFA et RMP 2006, Rindler-Daller Physica A 2008, Aftalion, Jerrard et Royo-Letelier preprint 2010
- ▶ Evaluation de Ω_{c1}

$$\Omega_{c1} = |\log \varepsilon|(1 + o(1)).$$

- ▶ Si $\Omega < \Omega_{c1}$: pas de vortex
- ▶ Si $\Omega = \Omega_{c1} + C \log |\log \varepsilon|$: nombre borné de vortex minimisant une certaine énergie renormalisée.

Résultats antérieurs : la deuxième vitesse critique

Régime $|\log \varepsilon| \ll \Omega \ll \varepsilon^{-2} |\log \varepsilon|^{-1}$:

- ▶ Correggi, Rindler-Daller, Yngvason JMP 2007 (deux articles), Correggi, Yngvason JPA 2008
- ▶ Si $\Omega \leq \frac{2}{\sqrt{\pi\varepsilon}}$: condensat en forme de disque
- ▶ If $\Omega > \frac{2}{\sqrt{\pi\varepsilon}}$: condensat annulaire
- ▶ **Distribution uniforme de vorticité dans le condensat** tant que $|\log \varepsilon| \ll \Omega \ll \varepsilon^{-2} |\log \varepsilon|^{-1}$.
- ▶ Evaluation de la seconde vitesse critique

$$\Omega_{c2} = \frac{2}{\sqrt{\pi\varepsilon}}(1 + o(1)).$$

Présentation des résultats

1. Résultats pour le piège “quadratique plus quartique”
 - 1.1 Régime “plus bas niveau de Landau” : réseau de vortex dans un condensat annulaire (avec Xavier Blanc)
 - 1.2 Régime de rotation extrême et vortex géant
2. Résultats pour le “piège plat” : la troisième vitesse critique
 - 2.1 **Borne supérieure et vortex géant** (avec Michele Correggi et Jakob Yngvason)
 - 2.2 Borne inférieure et cercle de vortex
 - 2.3 Quelques idées des preuves

Le régime $\Omega \propto \frac{1}{\varepsilon^2 |\log \varepsilon|}$

$$\Omega = \frac{\Omega_0}{\varepsilon^2 |\log \varepsilon|}$$

avec une constante Ω_0 .

Fonctionnelle d'énergie de type Thomas-Fermi :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{\text{TF}}[\rho] &= \int_{\mathcal{B}} \left(-\Omega^2 |x|^2 \rho + \frac{1}{\varepsilon^2} \rho^2 \right) dx \\ E^{\text{TF}} &= \inf_{\|\rho\|_{L^1(\mathcal{B}_1)}=1} \mathcal{E}^{\text{TF}}[\rho] = \mathcal{E}^{\text{TF}}[\rho^{\text{TF}}] \\ \rho^{\text{TF}}(r) &= \frac{\varepsilon^2 \Omega^2}{2} (r^2 - R_h^2)_+\end{aligned}$$

avec

$$1 - R_h^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi} \varepsilon \Omega} \propto \frac{\varepsilon |\log \varepsilon|}{\Omega_0}.$$

On définit

$$\mathcal{A}_{\text{bulk}} = \{ R_h + \varepsilon |\log \varepsilon|^{-1} \leq r \leq 1 \}.$$

Si

$$\Omega_0 > \frac{2}{3\pi},$$

Alors, pour tout $x \in \mathcal{A}_{\text{bulk}}$

$$||\Psi^{\text{GP}}(x)|^2 - \rho^{\text{TF}}(x)| \ll \rho^{\text{TF}}(x).$$

De plus

$$\deg(\Psi^{\text{GP}}, \partial\mathcal{B}) = \Omega - \frac{2}{3\sqrt{\pi}\varepsilon}(1 - o(1))$$

- La masse est concentrée dans $\mathcal{A}_{\text{bulk}}$

$$\int_{\mathcal{A}_{\text{bulk}}} |\Psi^{\text{GP}}(x)|^2 = 1 - o(1)$$

- Il n'y a pas de vortex dans $\mathcal{A}_{\text{bulk}}$

$$|\Psi^{\text{GP}}(x)|^2 \geq \frac{C}{\varepsilon |\log \varepsilon|^{-3}}.$$

- $\Omega_{\text{c3}} \leq \frac{2}{3\pi\varepsilon^2 |\log \varepsilon|} (1 + o(1))$

1. Résultats pour le piège “quadratique plus quartique”
 - 1.1 Régime “plus bas niveau de Landau” : réseau de vortex dans un condensat annulaire (avec Xavier Blanc)
 - 1.2 Régime de rotation extrême et vortex géant
2. Résultats pour le “piège plat” : la troisième vitesse critique
 - 2.1 Borne supérieure et vortex géant (avec Michele Correggi et Jakob Yngvason)
 - 2.2 **Borne inférieure et cercle de vortex**
 - 2.3 Quelques idées des preuves

Comment repérer les vortex ? : la mesure de vorticité

Extraction du vortex géant

- ▶ Pour $\omega \in \mathbb{Z}$ et f à valeurs réelles on introduit la **fonctionnelle d'énergie "vortex géant"**

$$\hat{\mathcal{E}}_{\omega}^{\text{GP}}[f] = \mathcal{E}^{\text{GP}}[f(r)e^{i([\Omega]-\omega)\theta}]$$

avec son énergie fondamentale $\hat{E}_{\omega}^{\text{GP}}$.

- ▶ On prend ω_0 minimisant $\hat{E}_{\omega}^{\text{GP}}$ et g le fondamental associé.
- ▶ On définit

$$u = \frac{\psi^{\text{GP}}}{ge^{i([\Omega]-\omega_0)\theta}}.$$

Courant superfluide associé

$$j := (iu, \nabla u)$$

Mesure de vorticité associée

$$\mu := \text{curl } j.$$

La mesure μ "compte" les vortex du condensat.

Asymptotiques pour la mesure de vorticité (1)

On prend

$$\Omega = \frac{2}{3\pi\varepsilon^2|\log\varepsilon|} - \frac{\Omega_1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}, \quad \frac{\log|\log\varepsilon|}{|\log\varepsilon|} \ll \Omega_1 \ll 1.$$

Soit

$$\mathcal{A}_{\text{bulk}} := \{\vec{r} \mid R_{\text{bulk}} \leq r \leq 1\}, \quad R_{\text{bulk}} := R_h + \varepsilon|\log\varepsilon|\Omega_1^{1/2}.$$

$\mathcal{A}_{\text{bulk}}$ contient presque toute la masse

$$\int_{\mathcal{A}_{\text{bulk}}} |\Psi^{\text{GP}}|^2 = 1 - O(\Omega_1^{1/2}).$$

Pour ν dans $C_c^1(\mathcal{A}_{\text{bulk}})^*$ on définit la norme

$$\|\nu\|_g := \sup_{\phi \in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\text{bulk}})} \frac{\left| \int_{\mathcal{A}_{\text{bulk}}} \nu \phi \right|}{\left(\int_{\mathcal{A}_{\text{bulk}}} \frac{1}{g^2} |\nabla \phi|^2 \right)^{1/2} + \varepsilon |\log\varepsilon| \|\nabla \phi\|_{L^\infty(\mathcal{A}_{\text{bulk}})}}.$$

Asymptotiques pour la mesure de vorticité (2)

Théorème (NR 2010)

Il existe un rayon R_ (calculable) et un nombre (calculable)*

$$N_* \propto \frac{\Omega_1}{\varepsilon}$$

tels que, en notant δ_ la mesure de Lebesgue sur le cercle de rayon R_* ,*

$$\|\mu - N_*\delta_*\|_g \ll \|N_*\delta_*\|_g.$$

- Il y a “environ” N_* vortex dans le condensat.
- Ils sont équitablement répartis sur le cercle de rayon R_*

$$\Omega_{c3} = \frac{2}{3\pi\varepsilon^2|\log\varepsilon|}(1 + o(1)).$$

1. Résultats pour le piège “quadratique plus quartique”
 - 1.1 Régime “plus bas niveau de Landau” : réseau de vortex dans un condensat annulaire (avec Xavier Blanc)
 - 1.2 Régime de rotation extrême et vortex géant
2. Résultats pour le “piège plat” : la troisième vitesse critique
 - 2.1 Borne supérieure et vortex géant (avec Michele Correggi et Jakob Yngvason)
 - 2.2 Borne inférieure et cercle de vortex
 - 2.3 **Quelques idées des preuves**

Un problème réduit sur un anneau

- ▶ Avec $\hat{E}_{\omega_0}^{\text{GP}}$, g respectivement l'énergie et le profil “vortex géant”, on peut **découpler l'énergie** [Lassoued-Mironescu, JAM 1999]

$$\mathcal{E}^{\text{GP}}[\psi] = \hat{E}_{\omega_0}^{\text{GP}} + \mathcal{E}[v]$$

$$\mathcal{E}[v] = \int_{\mathcal{B}} g^2 |\nabla v|^2 - 2g^2 B_{\omega_0} \cdot (iv, \nabla v) + \frac{g^4}{\varepsilon^2} (1 - |v|^2)^2$$

pour “toute” fonction d'onde $\psi = gve^{i([\Omega] - \omega_0)\theta}$, avec

$$B_{\omega_0} = \left(\Omega r - \frac{[\Omega] - \omega_0}{r} \right) \vec{e}_\theta.$$

- ▶ Il existe un **anneau \mathcal{A}** d'épaisseur $\varepsilon |\log \varepsilon|$ tel que g et $|\Psi^{\text{GP}}|$ sont $O(\varepsilon^\infty)$ dans $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$.
- ▶ En écrivant Ψ^{GP} sous la forme

$$\Psi^{\text{GP}} = g u e^{i([\Omega] - \omega_0)\theta}$$

u devrait “presque” minimiser \mathcal{E} , restreinte à \mathcal{A} , sous la contrainte

$$\int_{\mathcal{A}} g^2 |v|^2 = 1.$$

- ▶ **Outils principaux** : méthodes de boules-vortex et d'estimations de Jacobiens (Béthuel, Brézis, Hélein, Sandier, Jerrard, Serfaty, Soner ...)
- ▶ Analyse réminiscente du régime $\Omega \sim \Omega_{c_1}$ (Aftalion-Alama-Bronsard ARMA 2005, Ignat-Millot JFA et RMP 2006)
- ▶ Permet l'obtention de bornes inférieures de la forme

$$\int_{\mathcal{A}} g^2 |\nabla u|^2 - g^2 B_{\omega_0} \cdot (iu, \nabla u) \geq \sum_j 2\pi |d_j| \left(\frac{1}{2} g^2(a_j) |\log \varepsilon| + F(a_j) \right)$$

en fonction **des positions a_j et des degrés d_j de “vortex approchés”**

- ▶ Si Ω_0 est assez grand, la **fonction de coût**

$$H(r) = \frac{1}{2} g^2(r) |\log \varepsilon| + F(r)$$

est **positive**.

- ▶ Donc si Ω_0 est assez grand, les vortex ne sont plus favorables **énergétiquement**
- ▶ C'est le point clé pour l'obtention du Théorème “vortex géant”.

- **Point de départ** : couvrir l'ensemble $\{|1 - |u|| > |\log \varepsilon|^{-1}\}$ par une collection de **boules vortex** $B_j(a_j, r_j)$, avec $\sum_j |B_j| \ll |\mathcal{A}|$.
- Nécessite une borne supérieure sur

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\mathcal{A}} g^2 |\nabla u|^2 + \frac{g^4}{\varepsilon^2} (1 - |u|^2)^2$$

- Seule borne naturelle (fonction test $v_{trial} \equiv 1$)

$$\mathcal{E}[u] \leq 0$$

permet d'obtenir

$$\mathcal{F}[u] \leq C \int_{\mathcal{A}} |B_{\omega_0}|^2 g^2 |u|^2 \leq C \varepsilon^{-2}$$

- **Problème** : on a seulement $|\{|1 - |u|| > |\log \varepsilon|^{-1}\}| \leq C \varepsilon |\log \varepsilon| \sim |\mathcal{A}|$.
- Fort contraste avec le régime $\Omega \sim \Omega_{c1}$ dû à l'épaisseur infiniment fine de l'anneau

- **Solution** : Découper l'anneau en $N \propto \varepsilon^{-1} |\log \varepsilon|^{-1}$ cellules $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$ de taille $\varepsilon |\log \varepsilon|$
- **Supposons** qu'on puisse "localiser" l'estimation

$$\int_{\mathcal{A}_i} g^2 |\nabla u|^2 + \frac{g^4}{\varepsilon^2} (1 - |u|^2)^2 \leq C \varepsilon^{-2} \frac{1}{N} \propto \frac{|\log \varepsilon|}{\varepsilon}$$

- Alors

$$|\{ |1 - |u|| > |\log \varepsilon|^{-1} \} \cap \mathcal{A}_i| \leq C \varepsilon^3 |\log \varepsilon| \ll |\mathcal{A}_i| \propto \varepsilon^2 |\log \varepsilon|^2.$$

Méthode :

- Distinguer entre **bonnes et mauvaises cellules**
- Construire **les boules vortex** dans les bonnes cellules
- Utiliser les bornes inférieures sur $\mathcal{E}[u]$ dans les bonnes cellules pour **réduire progressivement le nombre de mauvaises cellules**.

Le cercle de vortex

- Pour $\Omega_1 \ll 1$ la fonction coût H a un minimum négatif en $r = R_*$

$$H(R_*) \propto -\frac{\Omega_1}{\varepsilon}$$

- Les vortex sont favorables près du cercle \mathcal{C}_{R_*} de rayon R_* .
- La répulsion inter-vortex est évaluée via un “champ électrique” associé à toute mesure ν

$$\begin{cases} -\nabla \left(\frac{1}{g^2} \nabla h_\nu \right) = \nu \text{ dans } \mathcal{A} \\ h_\nu = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{A}. \end{cases}$$

- On a l'asymptotique d'énergie

$$E^{\text{GP}} = \hat{E}_{\omega_0}^{\text{GP}} + \inf_{\text{supp}(\nu) \subset \mathcal{C}_{R_*}} \left(\int_{\mathcal{A}_{\text{bulk}}} \frac{1}{g^2} |\nabla h_\nu|^2 + H(R_*) \int \nu \right) (1 + o(1))$$

- μ devrait minimiser l'énergie “électrostatique” ci-dessus $\Rightarrow \mu \propto \delta_*$.

Perspectives

- ▶ Etendre l'analyse des deux dernières vitesses critiques à un piège plat avec conditions de Dirichlet : fait (Correggi, Pinsker, NR, Yngvason 2010)
- ▶ Considérer un Ω_0 variable : transition entre le réseau de vortex et le cercle de vortex au voisinage de Ω_{c3}
- ▶ Etendre l'analyse des deux dernières vitesses critiques à des potentiels de piégeage plus réalistes
- ▶ Etendre l'analyse à des pièges anisotropes
- ▶ Etudier certains régimes au niveau du problème quantique à N corps
- ▶ Prouver l'apparition du réseau hexagonal de vortex.